№ 7 дәріс

Функция шегі бар болуының Коши критерийі. Монотонды функция шегінің бар болукритерийі.

1-теорема (Коши критерийі). $f : E \to \mathrm{R}$ функциясының $\mathrm{E} \ni x \to a$ ұмтылғанда нақты мәнді шегінің бар болуы үшін кез-келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$, $0 < |x' - a| < \delta(\varepsilon)$ шарттарын қанағаттандыратын барлық $x, x' \in \mathrm{E}$ нүктелері үшін $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатын $\delta(\varepsilon) > 0$ санының табылуы қажетті және жеткілікті.

Ескерту. Бұл теоремадағы $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, $\forall x, x' \in \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{\mathrm{E}}(a)$ шартын, әдетте, Коши шарты деп атайды.

Осы аса маңызды теореманың кванторлар арқылы жазылуы мен a нүктесінде Коши шартының орындалмау жағдайын келтірейік.

$$\lim_{\mathrm{E} \ni x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x, x' \in \mathrm{E}\big(0 < |x - a| < \delta,\ 0 < |x' - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon\big)$$

немесе

$$\exists \lim_{\mathrm{E} \ni x \to a} f(x) = b \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{\mathrm{E}}(a) \ \forall x, x' \in \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{\mathrm{E}}(a)\big(|f(x) - f(x')| < \varepsilon\big).$$

Енді керісінше, $f(x)$ функциясының a нүктесінде шегі жоқ жағдайының жазылуы:

$$\nexists \lim_{\mathrm{E} \ni x \to a} f(x) := \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists \tilde{x}, \tilde{x}' \in \mathrm{E}\big(\big(0 < |\tilde{x} - a| < \delta,\ 0 < |\tilde{x}' - a| < \delta\big) \wedge |f(\tilde{x}) - f(\tilde{x}')| \geq \varepsilon\big)$$

немесе

$$\nexists \lim_{\mathrm{E} \ni x \to a} f(x) := \exists \varepsilon > 0 \ \forall \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{\mathrm{E}}(a) \ \exists \tilde{x}, \tilde{x}' \in \mathrm{E}\big(|f(\tilde{x}) - f(\tilde{x}')| \geq \varepsilon\big).$$

Дәлелдеуі.Қажеттілігі. Егер $\lim_{x \to a} f(x) = b$ шегі бар болса, онда шек анықтамасы бойынша

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x,x'\in \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{E}(a)\Big(\big(|f(x)-b|<\varepsilon/2\big)\wedge\big(|f(x')-b|<\varepsilon/2\big)\Big).$$

Сонда

$$|f(x)-f(x')|\le|f(x)-b|+|f(x')-b|<\varepsilon\,.$$

Жеткіліктілігі. $\forall\varepsilon>0\quad\exists \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{E}(a)\quad\forall x,x'\in \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{E}(a)\quad\big(|f(x)-f(x')|<\varepsilon\big)$ – Коши шарты орындалған деп ұйғарайық. Сонымен бірге, $\{x_n\}\in E$, $x_n\neq a$ $\forall n\in N$ және a санына жинақталатын тізбек болсын. Сонда $\{f(x_n)\}$ тізбегінің фундаментальдік екенін көрсетейік. Шынында да, $\{x_n\}$ тізбегі a-ға ұмтылатын болғандықтан, $\exists N\ \forall n>N\ \big(0<|x_n-a|<\delta(\varepsilon)\big)$. Осы теңсіздік пен $|f(x)-f(x')|<\varepsilon\ \forall x,x'\in \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{E}(a)$ теңсіздіктерін салыстырып, $\forall n,m>N\ \ |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$, яғни $\{f(x_n)\}$ сандық тізбегі фундаментельдік, демек, жинақты.

Енді $\{f(x_n)\}$ тізбегінің шегі $\{x_n\}$ тізбегін таңдаудан тәуелсіз екенін көрсетейік. Шынында да, егер біз a санына жинақталатын $\{x_n\}\in E$, $\{x_n'\}\in E$ екі тізбегі бар және $f(x_n)\to b$, $f(x_n')\to b'$, $n\to\infty$ және $b\neq b'$ деп ұйғарсақ, онда $x_1, x_1', x_2, x_2', ..., x_n, x'_n, ...$ тізбегі де a санына жинақталады, бірақ $f(x_1), f(x_1'), f(x_2), f(x'_2), ..., f(x_n), f(x'_n), ...$ тізбегі жинақталмайды. Бұл қайшылық $b=b'$ екенін көрсетеді. Теорема дәлелденді.

Функция шегінің жалпы қасиеттері

Бұрын атап өткеніміздей, тек бір ғана мән қабылдайтын $f:E\to R$ функциясын тұрақты функция деп атаймыз. Егер $f:E\to R$ функциясы E жиыны үшін шектік нүкте болатын a нүктесінің белгілі бір $\overset{\circ}{U}_{E}(a)$ маңайында тұрақты болса, онда $f:E\to R$ функциясын $E\ni x\to a$ ұмтылғанда финалді тұрақты деп атаймыз. Егер $f:E\to R$ функциясы үшін $|f(x)|<C$, $f(x)<C$, $C<f(x)$, $\forall x\in E$, теңсіздіктерін қанағаттандыратын $C\in R$ саны табылса, онда оларды сәйкес шектеулі, жоғарыдан шектеулі, төменнен шектеулі функция деп атаймыз. Теңсіздіктер a нүктесінің белгілі бір $\overset{\circ}{U}_{E}(a)$ маңайында ғана орындалса, онда функцияны сәйкес $E\ni x\to a$ ұмтылғанда финалді шектеулі, финалді жоғарыдан шектеулі, финалді төменнен шектеулі деп атаймыз.

Мысалы, $f(x)=\sin\frac{1}{x}+x\cos\frac{1}{x}$ функциясы $x\neq 0$ анықталу аймағында шектеулі емес, ал $x\to 0$ ұмтылғанда финальді шектеулі.

1-теорема. Егер $f:E\to R$ функциясы $E\ni x\to a$ ұмтылғанда финалді тұрақты болса, онда $\lim\limits_{E\ni x\to a}f(x)$ – шегі бар.

Дәлелдеуі. Финалді тұрақты функция анықтамасы бойынша

$\exists\ \overset{\circ}{U}_E(a)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_E(a)\ (f(x) = b)$. Демек, $\forall V(b) \exists\ \overset{\circ}{U}_E(a)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_E(a)\ (f(x) \in V(b))$. Бұл b саны $x\ a$-ға ұмтылғандағы $f(x)$ функциясының шегі болады деген сөз.

2-теорема. Егер $E \ni x \to a$ ұмтылғанда $f(x)$ функциясының шегі бар болса, онда ол $f : E \to \mathrm{R}$ функциясы $x\ a$-ға ұмтылғанда финалді шектеулі.

Дәлелдеуі. Шынында да, егер $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ болса, онда шек анықтамасы бойынша

$$\varepsilon = \mathrm{M}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathrm{E}\ \left(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon = \mathrm{M}\right),$$

ал бұдан $$|f(x)| = |f(x) - b + b| \le |f(x) - b| + |b| < \mathrm{M} + |b| = C,$$

яғни $f(x)$ финальді шенелген функция.

3-теорема. Егер $\mathrm{E} \ni x \to a$ ұмтылғанда $f : E \to \mathbb{R}$ функциясының шегі бар болса, онда ол шек жалғыз.

Дәлелдеуі. Айталық $f : E \to \mathbb{R}$ функциясының $x \to a$ ұмтылғанда екі шегі

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_2$ бар болсын және олар бірі біріне тең емес, яғни $b_1 \ne b_2$ деп ұйғарайық әрі ол нүктелердің $V(b_1)$, $V(b_2)$ маңайларын қиылыспайтындай етіп, яғни $V(b_1) \cap V(b_2) = \varnothing$ деп алайық, онда

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_1 := \exists\, \overset{\circ}{U'_{\mathrm{E}}}(a) \left(f\left(\overset{\circ}{U'_{\mathrm{E}}}(a)\right) \subset V(b_1) \right),$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_2 := \exists\, \overset{\circ}{U''_{\mathrm{E}}}(a) \left(f\left(\overset{\circ}{U''_{\mathrm{E}}}(a)\right) \subset V(b_2) \right).$$

Енді a нүктесінің $\overset{\circ}{U}_{\mathrm{E}}(a) \subset \overset{\circ}{U'_{\mathrm{E}}}(a) \cap \overset{\circ}{U''_{\mathrm{E}}}(a)$ маңайын алайық, ол $\overset{\circ}{U}_{\mathrm{E}}(a) \ne \varnothing$.

Одан $x \in \overset{\circ}{U}_{\mathrm{E}}(a)$ нүктесін алсақ, онда $f(x) \in V(b_1) \cap V(b_2)$ болар еді, ал бұлай болуы мүмкін емес, өйткені $V(b_1) \cap V(b_2) = \varnothing$. Бұл қайшылық теореманы дәлелдейді.